1. Natürliche Zahlen

Dezimalsystem
Man nennt die Zahlen, die man zum Zählen verwendet, natürliche Zahlen.
Wir rechnen im Dezimalsystem.
Dabei benutzen wir die zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und die Stufenzahlen1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, ...
Große Stufenzahlen lassen sich kürzer mit Zehnerpotenzen schreiben.

$$10963 = 1 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Der Stellenwert der Ziffer 6 ist 60.

1 Million = 1 000 000 $=10^6$
1 Milliarde = 1 000 000 000 = 10^9
1 Billion = 1 000 000 000 000 = 10^{12}

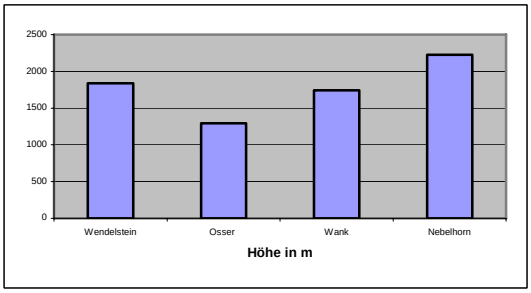
Runden einer natürlichen Zahl auf eine bestimmte Stelle:
Ist die Ziffer rechts von dieser Stelle kleiner als 5, so wird abgerundet, sonst wird aufgerundet.

Runde 1 093 a) auf Hunderter b) auf Zehner

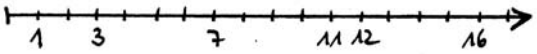
Lösung: a) 1093 ≈ 1100
b) 1093 ≈ 1090

Diagramme
Man verwendet zur Veranschaulichung von Zahlenwerten Diagramme.

Beispiel für ein Säulendiagramm:



Zahlenstrahl
Auf dem Zahlenstrahl lassen sich die natürlichen Zahlen der Größe nach anordnen. Die weiter rechts liegende Zahl ist die größere.



Zahlenmengen
Zahlen mit gemeinsamen Eigenschaften kann man in Zahlenmengen zusammenfassen.
Die Zahlen, die zu einer Menge gehören, heißen Elemente dieser Menge.

$a \in M$: „a ist ein Element der Menge M“
$a \notin M$: „a ist kein Element der Menge M“

|N ={1;2;3;4;5;6;...;118;...} Menge der natürlichen Zahlen
|N_0={0;1;2;3;...;83;...} Menge der natürlichen Zahlen mit 0
V_{12}={12;24;36;48;60;...:144;...} Menge der Vielfachen von 12
T_{12}={1;2;3;4;6;12} Menge der Teiler von 12

Eine **Primzahl** ist eine Zahl mit genau zwei Teilern. Jede Primzahl ist also nur durch sich selbst und durch Eins teilbar.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... sind Primzahlen

2. Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen

Addieren und Subtrahieren am Zahlenstrahl
Addieren bedeutet am Zahlenstrahl nach rechts gehen.
Subtrahieren bedeutet am Zahlenstrahl nach links gehen.

Summe

a + b = c

1.Summand 2. Summand Wert der Summe

Differenz

a - b = c

Minuend Subtrahend Wert der Differenz

Subtraktion

Addieren	Borgen	Ergänzen
2 653	8 3 ~~9~~5 7~~4~~8	95 748
+ 9 438	- 9 739	- 9 739
1 1		1 1
12 091	86 009	86 009

© Fachschaft Mathematik des OvTG

3. Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

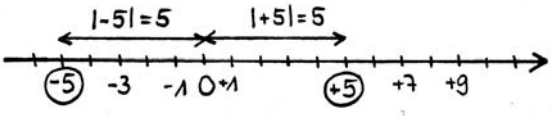
Ganze Zahlen: Vorzeichen, Gegenzahl, Betrag
Jede ganze Zahl (außer 0) hat ein Vorzeichen.
Eine positive Zahl hat das Vorzeichen +,
eine negative Zahl hat das Vorzeichen - .
Fehlt das Vorzeichen, hat man sich + zu denken.

Die kleinere Zahl liegt weiter links auf der Zahlengeraden.
Die Gegenzahl zu einer Zahl ist die auf der Zahlengeraden
bezüglich Null symmetrisch liegende Zahl.
Der Abstand der Zahl a von der Zahl 0 heißt Betrag von a. Schreibweise: | a |

Addition zweier ganzer Zahlen:
Gleiche Vorzeichen: Addiere die Beträge und gib der Summe das gemeinsame Vorzeichen!
Verschiedene Vorzeichen: Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag und gib der Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag!
Terme mit Plus- und Minuszeichen können stets als Summen mit den entsprechenden Vorzeichen aufgefasst werden. Beim Vertauschen von Gliedern in einer Summe muss man die Vorzeichen mitnehmen.

Subtraktion einer ganzen Zahl
Subtrahieren einer ganzen Zahl bedeutet dasselbe wie Addieren ihrer Gegenzahl.

Z = {…; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;…} Menge der ganzen Zahlen



-5 ist die Gegenzahl zu 5 (|-5| = |5| = 5)
708 ist die Gegenzahl zu -708

(+4) + (+3) = +(4 + 3) = 7
(-4) + (-3) = - (4 + 3) = -7

(-4) + (+3) = - (4 - 3) = -1
(+4) + (-3) = +(4 - 3) = 1

77 + 16 - 17 - 6 =
= 77 + (-17) +16 + (-6) =
= +(77 – 17) + (16 – 6) =
= 60 + 10 = 70

(+5) - (-7) = (+5) + (+7) = 12
(+5) - (+7) = (+5) + (-7) = - (7 - 5) = - 2

4. Multiplikation und Division natürlicher Zahlen

Statt 3 + 3 + 3 + 3 + 3 schreibt man auch 5 · 3 .
Die zugehörige Rechenart heißt **Multiplikation**.

$$\overbrace{a \cdot b}^{\text{Produkt}} = c$$

1.Faktor 2. Faktor Wert des Produkts

Die Umkehrung der Multiplikation ist die **Division**.

$$\overbrace{a : b}^{\text{Quotient}} = c$$

Dividend Divisor Wert des Quotienten

Jede Zahl lässt sich in Primfaktoren zerlegen.

Multiplikation

523 · 246
1046
2092
3138
128658

Division

128658 : 523 = 246
- 1046
2405
- 2092
3138
- 3138

Sonderfälle :
1 · a = a · 1 = a
0 · a = a · 0 = 0

a : 1 = a
0 : a = 0
für alle natürlichen Zahlen a.

Durch 0 kann man nicht dividieren!!

Primfaktorzerlegung der Zahl 630:
$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

5. Potenzieren

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren a}} = a^n$ (lies: “a hoch n”)

a^n heißt Potenz, a heißt **Basis**, n heißt **Exponent**

Sonderfälle:
n = 2 Quadratzahlen: z. B. $5^2 = 25$, $13^2 = 169$

a = 10 Zehnerpotenzen: z. B. $10^3 = 1000$

6. Multiplikation und Division ganzer Zahlen

Vorzeichenregeln:

+ · + = +	+ : + = +
- · - = +	- : - = +
- · + = -	- : + = -
+ · - = -	+ : - = -

(+5) · (+3) = + 15	(+18) : (+2) = +9
(- 5) · (- 3) = + 15	(-18) : (-2) = +9
(- 5) · (+3) = - 15	(- 18) : (+2) = - 9
(+5) · (- 3) = - 15	(+18) : (-2) = - 9

© Fachschaft Mathematik des OvTG

7. Rechengesetze und Rechenvorteile

Für alle ganzen Zahlen a, b, c gelten:

Kommutativgesetze der

Addition	Multiplikation
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetze der

Addition	Multiplikation
$a+(b+c) = (a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Rechenvorteile:

Geschicktes Zusammenfassen:
$(12 + 57) + 3 = (57 + 3) + 12 = 60 + 12 = 72$

Geschicktes Ausklammern:
$7 \cdot 25 + 7 \cdot 5 = 7 \cdot (25 + 5) = 7 \cdot 30 = 210$

Geschicktes Ausmultiplizieren:
$45 \cdot 98 = 45 \cdot (100 - 2) = 45 \cdot 100 - 45 \cdot 2 =$
$= 4500 - 90 = 4410$

8. Verbindung der vier Grundrechenarten

Terme bestehen aus Zahlen, Variablen, Rechenzeichen und Klammern. Innere Klammern rechnet man zuerst aus.

Die letzte durchzuführende Rechenart legt die Art des Terms fest.

Vereinbarungen für die Reihenfolge:
1. Man rechnet von links nach rechts.
2. Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet.
3. Potenz vor Punkt vor Strich

Die zuletzt ausgeführte Rechenart bestimmt den Termnamen.

$3+a$ und $[2 \cdot (35-7)+20] : 19$ sind Beispiele für Terme

Termgliederung:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(76 - 19)}_{\text{Differenz}} \cdot 12}_{\text{Produkt}} + \underbrace{72 : 3}_{\text{Quotient}}}_{\text{Summe (= Termname)}}$$

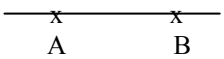
Berechnung:

$(76-19) \cdot 12 + 72 : 3 = 57 \cdot 12 + 24 = 684 + 24 = 708$

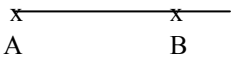
9. Geometrische Grundbegriffe

Punkte, Geraden, Strecken

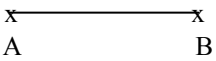
Gerade g = AB



Halbgerade [AB



Strecke [AB]



Länge der Strecke: $\overline{AB} = 2{,}5$ cm

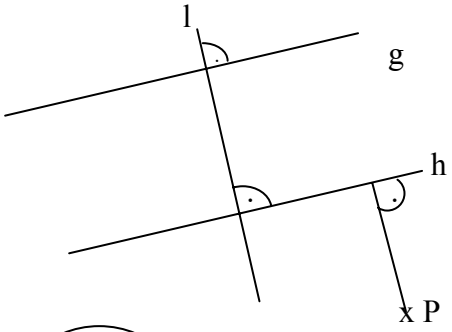
Abstand eines Punktes P von einer Geraden h:
Länge der Lotstrecke von P bis h = d (P;h).

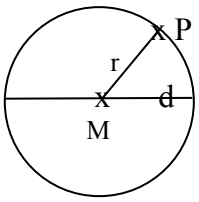
Abstand zweier paralleler Geraden g und h:
Länge der Lotstrecke zwischen g und h = d (g;h)

Kreise

Alle Punkte P eines Kreises haben von seinem Mittelpunkt M den gleichen Abstand r.
M heißt Mittelpunkt des Kreises,
r heißt Radius des Kreises,
d heißt Durchmesser des Kreises: d = 2r.

Besondere gegenseitige Lage von Geraden
g ist parallel zu h: $g \parallel h$
g ist senkrecht zu l: $g \perp l$
l ist gemeinsame Lotgerade zu g und h



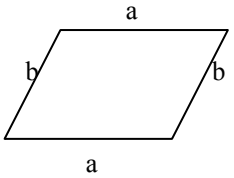


© Fachschaft Mathematik des OvTG

Vierecke

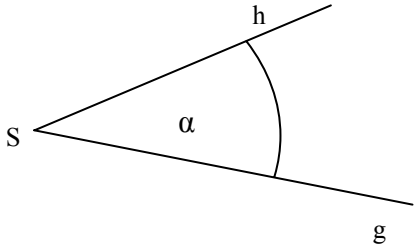
Das **Parallelogramm** ist ein Viereck, bei dem die gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel sind.

Umfang eines Parallelogramms mit den Seitenlängen a und b: $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



Winkel

Dreht man eine Halbgerade um ihren Anfangspunkt S, so entsteht ein Winkel. S heißt Scheitel des Winkels, g und h heißen Schenkel des Winkels.



Achsensymmetrie

P und P´ liegen symmetrisch bezügliche der Achse a, wenn $[PP']$ von der Achse rechtwinklig halbiert wird.

Figuren heißen achsensymmetrisch, wenn sie eine Symmetrieachse besitzen.

Koordinatensystem

Jeder Punkt in einem Koordinatensystem lässt sich durch ein Zahlenpaar beschreiben.

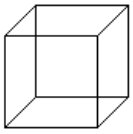
Die Zahlen heißen **Koordinaten** des Punktes:

P (2 | 1)

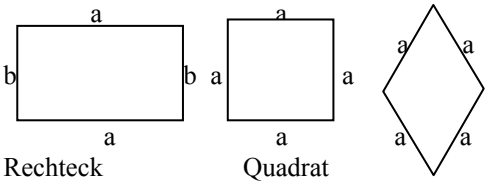
x-Koordinate y-Koordinate

Geometrische Körper

Zum Zeichnen räumlicher Körper verwendet man Schrägbilder.



Besondere Vierecke:

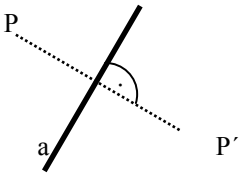


Rechteck Quadrat

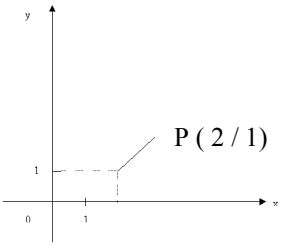
Die Winkel von 0° bis 360° werden auf die folgende Art aufgeteilt:

spitzer Winkel: 0° < 90°
rechter Winkel: 90°
stumpfer Winkel: 90° < 180°
gestreckter Winkel: 180°
überstumpfer Winkel: 180° < 360°
Vollwinkel: 360°

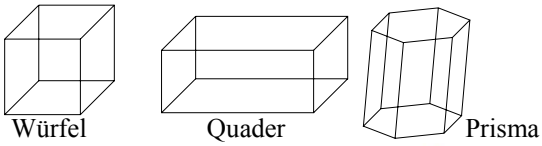
vgl. Geodreieck:



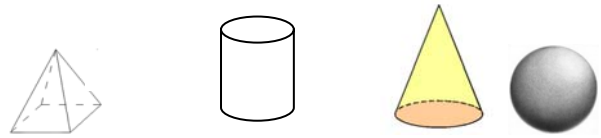
Achsensymmetrie in der Natur



Schrägbilder der geometrischen Grundkörper:



Würfel Quader Prisma

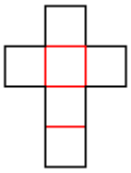


Pyramide Zylinder Kegel Kugel

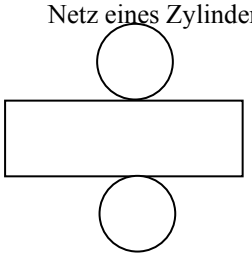
© Fachschaft Mathematik des OvTG

Wird die Oberfläche eines geometrischen Körpers aufgeschnitten und in der Ebene ausgebreitet, so erhält man das Netz eines Körpers.

Netz eines Würfels



Netz eines Zylinders



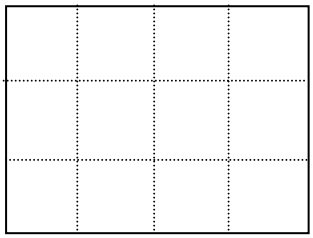
Flächenmessung

Zur Flächenmessung verwendet man Einheitsquadrate.
Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1cm hat den Flächeninhalt 1 cm^2.
Umrechnung von Flächeneinheiten:
Die Flächenumwandlungszahl ist 100.
Aufeinanderfolgende Flächeneinheiten:
$1mm^2$; $1cm^2$; $1dm^2$; $1m^2$; 1° ; 1ha ; $1km^2$

Flächeninhalt eines Rechtecks
der Länge l und Breite b:
$A_{Rechteck} = b \cdot l$

Oberflächeninhalt eines Quaders
der Länge l, Breite b und Höhe h:
$O_{Quader} = 2 \cdot (l \cdot b + l \cdot h + b \cdot h) = 2 \cdot l \cdot b + 2 \cdot l \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$

In das Rechteck passen 4·3 Einheitsquadrate mit 1 cm² Flächeninhalt. Es hat also den Flächeninhalt 12 cm².



3 cm

4cm

Sonderfälle:

$A_{Quadrat} = a \cdot a = a^2$ Quadrat mit Seitenlänge a

$O_{Würfel} = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$ Würfel mit Kantenlänge a

10. Größen

Jede Größe besteht aus Maßzahl und Maßeinheit.
Verschiedene Größen und ihre Einheiten.

Größe	Länge	Fläche	Masse	Geld	Zeit
Einheit	km	km^2	t	Euro	a
	hm	ha	kg	ct	d
	dam	a	g		h
	m	m^2	mg		min
	dm	dm^2			s
	cm	cm^2			
	mm	mm^2			

1 km = 1000 m
1 m = 10 dm
1dm = 10 cm
1cm = 10 mm
(1 dam = 10 m, 1 hm = 10 dam, 1 km = 10 hm)
Umrechnungszahl 10 bei Längen

1 km^2 = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 m^2
1 m^2 = 100 dm^2
1 dm^2 = 100 cm^2
1 cm^2 = 100 mm^2
Umrechnungszahl 100 bei Flächen

1t = 1000 kg
1 kg = 1000 g
1 g = 1000 mg

1a = 365 d
1d = 24 h
1 h = 60 min = 60 · 60 s = 3600 s
1 min = 60 s

1€ = 100 ct

Will man Größen addieren bzw. subtrahieren, so muss man sie vorher in die gleiche Maßeinheit umrechnen.
Eine Größe wird mit einer Zahl multipliziert (durch eine Zahl dividiert), indem man die Maßzahl mit der Zahl multipliziert (durch die Zahl dividiert) und die Maßeinheit beibehält.
Der Quotient zweier Größen gleicher Art ist eine Zahl. Sie gibt an, wie oft die kleinere Größe in der größeren enthalten ist.

55 cm + 1,20 m = 55 cm + 120 cm = 175 cm

4,250 kg – 200 g = 4250 g – 200 g = 4050 g
12 h : 3 = 4 h
15 kg · 3 = 45 kg

120 € : 5€ = 24

Maßstab
Die Angabe Maßstab 1:200 in einem Plan bedeutet: Die Länge im Plan ist der zweihundertste Teil der Länge in der Wirklichkeit.

Auf einer Karte mit Maßstab 1: 25 000 ist eine Strecke 2 cm lang. In Wirklichkeit ist sie 2 ×25000 cm = 500m lang.

© Fachschaft Mathematik des OvTG