Direkte und indirekte Proportionalität (8)

1. Zuordnung

Ein Wertepaar (x;y) zweier Größen, das „zusammen gehört“, ist einander zugeordnet.

Bsp.: Mein Vorname gehört zu meinem Nachnamen ⇔
Vor- und Nachname sind einander zugeordnet

Schreibweise: $x \mapsto y$ bedeutet hier also: Donald $\mapsto$ Duck

Mein Vorname und mein Geburtstag gehören zusammen ⇔
Vorname und Geburtstag sind einander zugeordnet

Schreibweise: $x \mapsto y$ bedeutet hier also: Donald $\mapsto$ 9. Juni 1934

Merke: Zuordnungen sind nicht immer eindeutig ...

Bsp.: Tageshöchsttemperatur $\mapsto$ Datum
Die selbe Höchsttemperatur gab es schon an mehreren Tagen

Betrag einer rationalen Zahl $\mapsto$ Rationale Zahl selbst
Den Betrag 5 haben die rationalen Zahlen –5 und +5.

... aber es gibt eindeutige Zuordnungen. Diese eindeutigen Zuordnungen nennt man Funktionen (dazu später mehr!):

Bsp.: Datum $\mapsto$ Tageshöchsttemperatur
An jedem Tag gibt es nur eine Höchsttemperatur

Rationale Zahl $\mapsto$ Betrag dieser rationalen Zahl

Zuordnungsvorschrift:
Lässt sich eine Zuordnung mathematisch ausdrücken, gibt man i.d.R. eine Zuordnungsvorschrift an.

Bsp.: Zuordnung Rationale Zahl (x) $\mapsto$ Betrag dieser rationalen Zahl (y)
Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y = |x|$

Sprechweise: „Der Zahl x wird der Betrag von x als y-Wert zugeordnet“
Rationale Zahl $\mapsto$ Das Doppelte vom Quadrat dieser Zahl von 10 subtrahiert
Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y = 10 - 2 \cdot x^2$

2. Direkte Proportionalität

Gehört bei einer Zuordnung $x \mapsto y$ zum Doppelten, Dreifachen, ... Halben, ... zum r-fachen der einen Größe das Doppelte, Dreifache, ... , Halbe, ... das r-fache der anderen Größe, d.h. ändern sich beide Größen im gleichen Verhältnis, so nennt man die Zuordnung eine direkte Proportionalität.

Der Graph einer direkten Proportionalität ist eine Ursprungsgerade. Er besteht aus allen Punkten (x/y), wobei x und y einander zugeordnet sind.

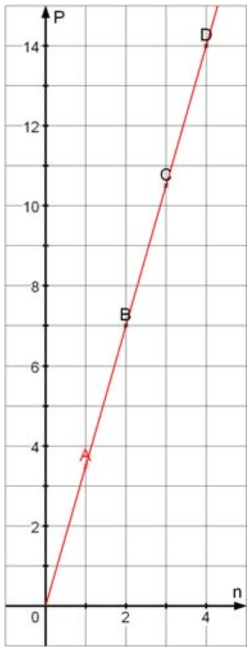
Bei einer direkt proportionalen Zuordnung $x \mapsto y$ ist der Quotient $\frac{y}{x}$ für jedes Wertepaar (x;y) zugeordneter Größen gleich. Diesen Wert nennt man Proportionalitätsfaktor $q := \frac{y}{x}$.

Direkte und indirekte Proportionalität (8)

Bsp.: Zuordnung Anzahl gekaufter Waschmittelpackungen $\mapsto$ Preis

1 Packung (1 kg) Waschmittel kostet 3,50 €
2 Packungen (je 1 kg) Waschmittel kosten 7,00 €
3 Packungen (je 1 kg) Waschmittel kosten 10,50 € ...

oder allgemein $n \mapsto P = 3{,}50 \cdot n$



Bsp.: Zuordnung Masse eines Körpers $\mapsto$ Gewichtskraft des Körpers
$m \mapsto F_G = m \cdot g$

Die Zuordnung Geschwindigkeit eines Körpers $\mapsto$ Kinetische Energie des Körpers ist keine direkte Proportionalität:
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$: doppelte Geschwindigkeit ➔ vierfache kinetische Energie

Musteraufgabe:
Eine Drahtrolle mit 100 m Draht wiegt 1,4 kg. Eine zweite Drahtrolle mit 50 m Draht wiegt 700 g, und eine dritte Drahtrolle mit 300 m Draht wiegt 4,2 kg. Alle Drähte haben die gleiche Dicke. Handelt es sich jeweils um die selbe Drahtsorte?

Lösung: Die Zuordnung $x \mapsto y$ lautet hier: Länge des Drahtes $\mapsto$ Masse des Drahtes

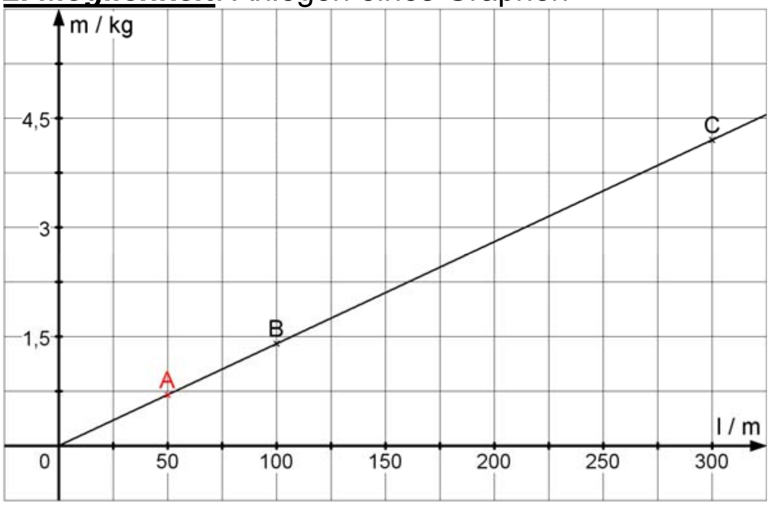
1. Möglichkeit: Anlegen einer Wertetabelle

:2 ·3

x	Länge des Drahtes / Meter	50	100	300
y	Masse des Drahtes / kg	0,7	1,4	4,2

:2 ·3

2. Möglichkeit: Anlegen eines Graphen



3. Möglichkeit: Proportionalitätsfaktor bestimmen

$\frac{0{,}7\,kg}{50\,m} = 0{,}014\,\frac{kg}{m}$; $\frac{1{,}4\,kg}{100\,m} = 0{,}014\,\frac{kg}{m}$; $\frac{4{,}2\,kg}{300\,m} = 0{,}014\,\frac{kg}{m}$

Ergebnis: da es sich hier um eine direkte Proportionalität handelt ist die Drahtsorte jeweils gleich!

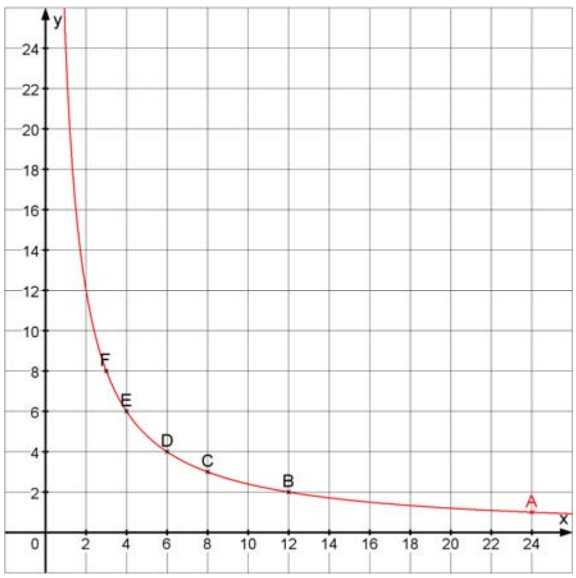
2. Indirekte Proportionalität / Umgekehrte Proportionalität

Gehört bei einer Zuordnung $x \mapsto y$ ...
zum Doppelten, zum Halben, zum Dreifachen, ... zum r-fachen der einen Größe
die Hälfte, das Doppelte, ein Drittel, ... der r-te Teil (d.h. das $\frac{1}{r}$ – fache) der anderen Größe,
so nennt man die Zuordnung eine indirekte (umgekehrte) Proportionalität.

Der Graph einer indirekten Proportionalität ist eine Hyperbel.

Bei einer indirekt proportionalen Zuordnung $x \mapsto y$ ist das Produkt $x \cdot y$ für jedes Wertepaar (x;y) zugeordneter Größen gleich.

Musteraufgabe: Du hast 24 Memory-Karten in der Hand. Lege aus ihnen verschiedene Rechtecke. Gib die Länge (x) und Breite (y) der Rechtecke an. Handelt es sich hier um eine indirekte Proportionalität?



Lösung:

Länge x	6	8	12	24
Breite y	4	3	2	1

Legst du statt 6 Karten 12 in eine Reihe (doppelt so viele) halbiert sich die Breite. Legst du statt 8 Karten 24 in eine Reihe (drei mal so viele) drittelt sich die Breite

Zuordnungsvorschrift: $\underbrace{x \mapsto y = \frac{24}{x}}_{x \cdot y = 24}$ ➔ das Produkt

$x \cdot y = 24$ ist für alle Wertepaare gleich, also handelt es sich um eine indirekte Proportionalität.

Kreisumfang, Kreisfläche (8)

Vergleicht man kreisförmige Gegenstände lässt sich feststellen, dass es einen Zusammenhang zwischen dem Durchmesser und dem Umfang gibt.

Ein Kreis mit dem Durchmesser d bzw. dem Radius r hat den Umfang

$U = d \cdot \pi$ bzw. $U = 2 \cdot r \cdot \pi$

Dabei ist π die „Kreiszahl“. π ist ungefähr 3,14.

Beispiel:
Die Erde hat einen Radius von ca. 6360 km. Wie lang müsste ein Seil ungefähr sein, wenn man es am Äquator einmal rund um die Erde spannen würde?

Ansatz: $U = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 6360 \quad km \cdot \pi \approx 39941 \quad km$

Das Seil wird jetzt um genau einen Meter verlängert. Wenn man das Seil jetzt überall gleich weilt vom Boden hoch heben würden, wie hoch würde das Seil überall über der Erde „schweben“?

Umkehrrechnung, gesucht ist der Radius!

$U = 2 \cdot r \cdot \pi = 39941\, km + 1\, m = 39960{,}001\, km \ldots$

Das Seil steht ca. 16 cm über der Erde.

Ein Kreis mit dem Radius r hat den Flächeninhalt $A = r^2 \cdot \pi$.

1. Definitionen

Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem Wert x jeweils nur einen Wert y zuordnet, heißt Funktion.

Beispiel und Schreibweise: Zuordnung $x \mapsto y = x^2 + 2$

Funktionsvorschrift: $x \mapsto x^2 + 2$

Funktionsterm: $f(x) = x^2 + 2$ („f von x ist gleich x hoch 2 plus 2“)
Dabei ist hier „f“ der Name der Funktion.

Funktionsgleichung: $y = x^2 + 2$

Neben der Funktionsvorschrift bedarf es auch einer Angabe, für welche Zahlen x der Funktionswert y berechnet werden darf bzw. werden soll. Alle diese Zahlen zusammen bilden die Definitionsmenge der Funktion (Schreibweise: D_f). Die maximale Definitionsmenge ist die Menge aller einsetzbaren Zahlen (D_{max}).

Musteraufgabe:

Welcher der Punkte A(-2/4), B(0/1), C(2/-1) liegt auf dem Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$?

Lösung: Berechne jeweils den jeweils dem x-Wert zugeordneten y-Wert

$f(-2) = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + 1 = 4$ ➔ der Punkt A liegt auf dem Graphen, da dem x-Wert –2 der y-Wert 4 zugeordnet ist;

$f(0) = -\frac{3}{2} \cdot (0) + 1 = 1$ ➔ B liegt auf dem Graphen

$f(2) = -\frac{3}{2} \cdot 2 + 1 = -2$ ➔ der Punkt P(2/-2) liegt auf dem Graphen, damit kann der Punkt C, der die gleiche x-Koordinaten besitzt, nicht auf dem Graphen liegen. Da die y-Koordinate des Punktes C größer ist als die von P liegt C oberhalb des Graphen der Funktion.

2. Nullstellen

Die x-Koordinate eines Schnittpunktes eines Funktionsgraphen G_f mit der x-Achse heißt Nullstelle der Funktion f. Jede Nullstelle x hat damit den y-Wert 0 → f(x) = 0.

Musterbeispiele:

a) Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x + 5$.

Lösungsansatz: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ (vgl. Lösen von Gleichungen, 7. Klasse)

b) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen der Funktion $f(x) = 2x + 5$ mit den Koordinatenachsen.

Lösungsansatz: es gibt zum einen Schnittpunkte mit der x-Achse (→ Nullstelle $x = -\frac{5}{2}$) als auch mit der y-Achse; hierfür ist die x-Koordinaten 0 ➔ $f(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$

➔ Schnittpunkte $S_1\left(-\frac{5}{2}/0\right)$ und S_2 (0/5)

c) Wie viele Nullstellen hat die Funktion f(x) = x² - 4 ?

Lösungsansatz: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ oder $x = -2$ ➔ es gibt 2 Nullstellen!

Jede Funktion der Art $f(x) = m \cdot x + t, D_f = \mathbb{Q}$ (wobei m und t rationale Zahlen darstellen) heißt lineare Funktion.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt t. (d.h. der Graph schneidet die y-Achse in (0/t))

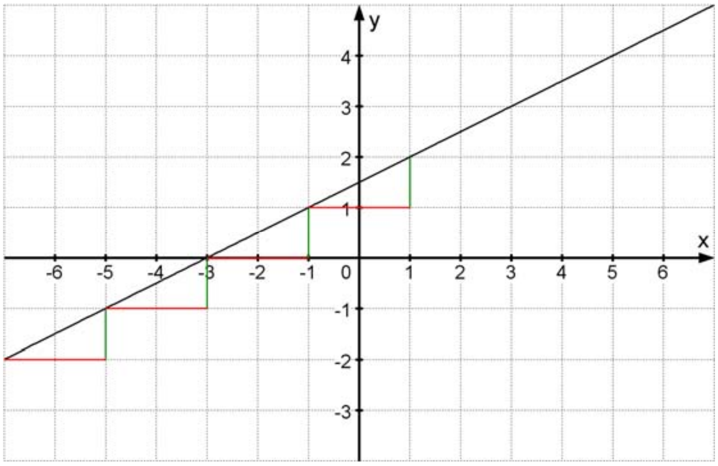
→ Ist m positiv, so steigt die Gerade. Je größer m ist, umso steiler ist die Gerade.
→ Ist m negativ, so fällt die Gerade. Je kleiner m ist, umso steiler ist die Gerade.
→ Ist m = 0, so ist die Gerade parallel zur x-Achse.
→ Geraden mit gleicher Steigung sind parallel.
→ Ist t = 0, so verläuft die Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems („Ursprungsgerade")

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1{,}5$

Steigung $m = \frac{1}{2}$ ⇔ Bestimmung mit Hilfe des Steigungsdreiecks:

$$m = \frac{\text{"Höhen-Unterschied"}}{\text{"Längen-Unterschied"}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

y-Achsenabschnitt t = 1,5 ⇔ Schnittpunkt mit der y-Achse ist S(0/1,5)



Beispiel: Liegt der Punkt P(3/7) auf der Geraden g mit der Gleichung y = 2x+2?

Lösung: Einsetzen der Koordinaten des Punktes P in die Gleichung

➔ $\underbrace{7}_{y} \overset{?}{=} \underbrace{2}_{m} \cdot \underbrace{3}_{x} + \underbrace{2}_{t} \Leftrightarrow 7 \overset{?}{=} 8$

Ergebnis: Der Punkt (3/8) liegt auf der Geraden, der Punkt P somit unter der Geraden!

Beispiel: Eine Gerade verläuft durch die Punkte A(-2/6) und B(2/-2). Wie lautet die zur Gerade gehörende Funktionsgleichung?

Lösung:

1. Bestimmung der Steigung: $m = \frac{\text{"Höhen-Unterschied"}}{\text{"Längen-Unterschied"}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{6-(-2)}{-2-(2)} = \frac{8}{-4} = -2$
2. Bestimmung des y-Achsenabschnitts mit Hilfe von A (oder B – beide Punkte möglich): Der Punkt A liegt auf dem Graphen der Funktion $\underbrace{f(x)}_{y-\text{Wert}} = \underbrace{m}_{\text{Steigung}} \cdot \underbrace{x}_{x-\text{Wert}} + \underbrace{t}_{\text{gesucht}}$

➔ $\underbrace{6}_{y-\text{Wert}} = \underbrace{-2}_{\text{Steigung}} \cdot \left(\underbrace{-2}_{x-\text{Wert}}\right) + \underbrace{t}_{\text{gesucht}}$ ➔ t = 2

Die zur Geraden gehörende Gleichung lautet y = -2x+2

Sind $f(x) = mx + t$ und $g(x) = ax + b$ zwei lineare Funktionen, so schneiden sich die Graphen der beiden Funktion in genau einem Punkt, wenn $m \neq a$ ist („G_f und G_g sind nicht parallel")

Rechnerische Bestimmung des Schnittpunkts am Beispiel $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = -3x - 6$

1. Ansatz: f(x) = g(x)	$2x + 4 = -3x - 6$
2. Löse die Gleichung nach x auf	$2x + 4 = -3x - 6 \quad / + 3x; -4$ $5x = -10 \quad /:2$ $x = -2$
3. Einsetzen des bestimmten x-Wertes in eine der beiden Funktionsgleichungen zur Bestimmung des y-Werts	f(-2) = 0 ➔ Schnittpunkt S (-2 / 0)

Lineare Gleichungen mit 2 Variablen

Jede Gleichung der Form 2x+3y=9 bzw. allgemein ax+by = c (a, b, c rationale Zahlen) heißt Gleichung mit 2 Variablen.

Jede Gleichung mit 2 Variablen hat unendlich viele Lösungen, die sich graphisch als Gerade auftragen lassen. In unserem Beispiel 2x+3y = 9 sind dies z.B. die Wertepaare (x=0, y=3) oder (x=9, y=-3); d.h. die Punkte (0/3) und (9/-3) liegen auf der entsprechenden Gerade.

Zusammenhang zwischen Gleichungen mit 2 Variablen und linearen Funktionen:

Gleichung $ax + by = c$, wobei $b \neq 0$ ist:

$$ax + by = c \quad / - ax$$
$$by = -ax + c \quad /:b$$
$$y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{\text{Steigung}} x + \underbrace{\frac{c}{b}}_{\text{y-Achsen-abschnitt}}$$

Graphisch lässt sich die Lösungsmenge dieser Gleichung durch die so bestimmten Gerade darstellen.

Gleichung $ax + by = c$, wobei $b = 0$ ist:

$$ax = c \quad /:a$$
$$x = \frac{c}{a}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Menge aller Punkte mit dem x-Wert $\frac{c}{a}$, somit lässt sich die Lösungsmenge graphische als Gerade parallel zur y-Achse darstellen.

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen (8)

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gemeinsamen Variablen wie z.B.
(1) x+2y = 8
(2) 3x-4y = 4
bilden ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit zwei Variablen.

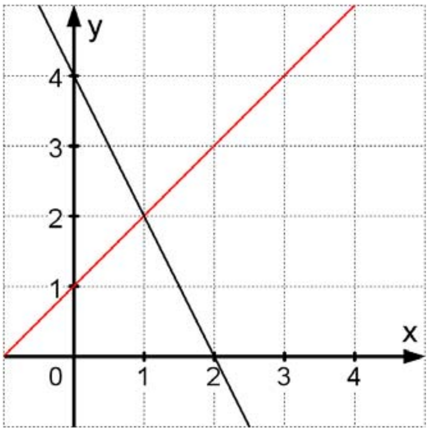
Ein Zahlenpaar (x/y) heißt Lösung dieses LGS, falls das Paar eine Lösung jeder Gleichung des LGS ist.

Da sich die Lösungsmenge einer Gleichung mit 2 Variablen als Gerade darstellen lässt ist die gemeinsame Lösung eines LGS der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Normalfall

(1) y-x = 1
Geradenform
y = 1+x

(2) y+2x = 4
Geradenform
y = -2x+4

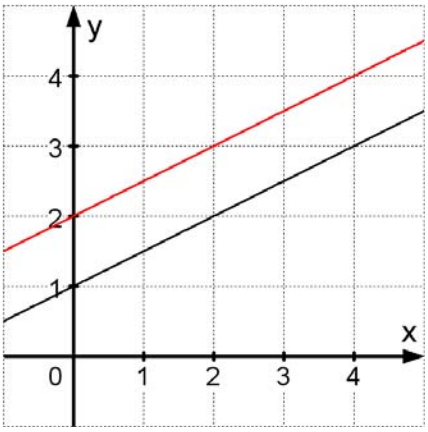


Lösungsmenge des LGS:
L={(1/2)}

1. Sonderfall

(1) 2y – x = 4
Geradenform
$y = \frac{1}{2}x + 2$

(2) 2y-x = 2
Geradenform
$y = \frac{1}{2}x + 1$

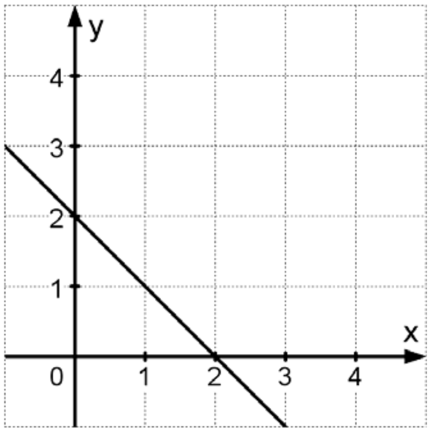


Lösungsmenge des LGS:
L= { }

2. Sonderfall:

(1) 2,5x + 2,5y = 5
Geradenform
y = -x + 2

(2) x+y = 2
Geradenform
y = -x+2



Lösungsmenge des LGS:
L = {(x/y) mit y = -x+2 | x∈Q}

Rechnerische Lösung eines LGS mit dem Einsetzverfahren:

Theorie	Praxis
Löse eine der beiden Gleichungen des LGS nach einer der beiden Variablen auf. Achte auf möglichst vorteilhaftes Rechnen!	(1) 3x + 2y = 7 (2) x – 3y = -1 Löse (2) nach x auf → (2) x = 3y – 1
Setze die so aufgelöste Variable in die andere Gleichung des LGS ein!	Eingesetzt in (1) → $3 \cdot (3y - 1) + 2y = 7$
Löse die zweite Gleichung nach der 2. Variable auf.	$9y - 3 + 2y = 7$ $11y = 10$ $y = \frac{10}{11}$

Bestimme den Wert der 1. Variable, indem du das Zwischenergebnis in eine der beiden Gleichungen einsetzt.	Eingesetzt in (2) $x-3\cdot\frac{10}{11}=-1$ $x-\frac{30}{11}=-1$ $x=\frac{19}{11}$
Gib die Lösungsmenge an. Überprüfe sie ggf. durch Einsetzten.	L = $\left\{\left(\frac{19}{11}/\frac{10}{11}\right)\right\}$

Laplace-Experiment und Zählprinzip (1)

Ergebnismenge (Ergebnisraum)
Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man Ergebnismenge Ω.
Die einzelnen Ergebnisse bezeichnet man mit ω_1 , ω_2 , ω_3 , ……

Ereignis
Jede Teilmenge A der Ergebnismenge Ω nennt man Ereignis.
|A| benennt die Anzahl der Ergebnisse des Ereignisses A
Erhält man bei der Durchführung des Zufallsexperinments eine Ergebnis, das zu A gehört, so sagt man, dass das Ereignis A eingetreten ist.

Besondere Ereignisse
Ω heißt <u>sicheres Ereignis</u> , { } heißt <u>unmögliches Ereignis</u>
$\overline{A}$ enthält alle Ergebnisse, die nicht zu A gehören und heißt <u>Gegenereignis zu A</u>

Wahrscheinlichkeit
Bei einem Zufallsexperiment wird jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit zwischen P(A) zwischen Null und Eins zugeordnet.
Bei vielen Versuchsdurchführungen stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses um die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Laplace-Experimente
Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen Laplace-Experimente.

Für Laplace-Experimente gilt:
Die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A erhält man, indem man die Anzahl der für A günstigen durch die Anzahl der möglichen Ergebnisse dividiert:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}=\frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Wahrscheinlichkeiten

$P(\Omega) = 1$, $P(\{\}) = 0$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Zählprinzip

Um die Gesamtzahl der Möglichkeiten eines mehrstufigen Zufallsexperiments zu erhalten, muss man die Anzahlen der Möglichkeiten in den einzelnen Stufen multiplizieren.

Laplace-Experiment und Zählprinzip (2) 8

Aufgabe 1:

In einer Urne sind 5 Kugeln mit den Nummern 1 bis 5. Die Kugel 1 ist rot, die Kugeln 2 und 3 sind blau, die restlichen Kugeln sind grün. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen und die Nummer notiert. Dann wird die Kugel wieder zurückgelegt und noch mal gezogen und die gezogene Nummer rechts neben die erste Nummer geschrieben.
a) Gib die Ergebnismenge an. Wie viele Elemente enthält sie?
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Das Ergebnis ist ein Pasch (d.h. beide Nummern sind gleich)
B: Das Ergebnis ist kein Pasch
C: Die Summe der beiden Nummern ist 5
D: Die beiden gezogenen Kugeln sind gleichfarbig

Lösung 1:

a) Ω = {(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5), (4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5)}

Anzahl der Elemente = $|\Omega|$ = 25

b) A ={ (1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5)} |A| = 5 $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{5}{25}=0,2=20\%$

B ist das Gegenereignis zu A.

$$B=\overline{A}$$
$$P(B)=1-P(A)=100\%-20\%=80\%$$

C = {(1;4),(4;1),(2;3),(3;2)} $P(C)=\frac{4}{25}=16\%$

D = {(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(2;3),(3;2),(4;5),(5;4)} $P(D)=\frac{9}{25}=36\%$

Beachte: Nimmt man nur die Farbkombinationen als Ergebnis, ist der zugehörige Ergebnisraum kein Laplace-Ergebnisraum!

Aufgabe 2:

Wie viele verschiedene Einstellungen gibt es bei einem 4 stelligen Zahlenschloss?

Lösung 2:
An jede Stelle kann man 10 verschieden Ziffern (0;1;…;9) setzen und vier Stellen hat man.
$10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10^4 = 10000$ Möglichkeiten.

Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man gebrochen rationale Funktionen.

Zur **Definitionsmenge D** gehören alle Zahlen, für die der Nenner <u>nicht</u> Null wird.

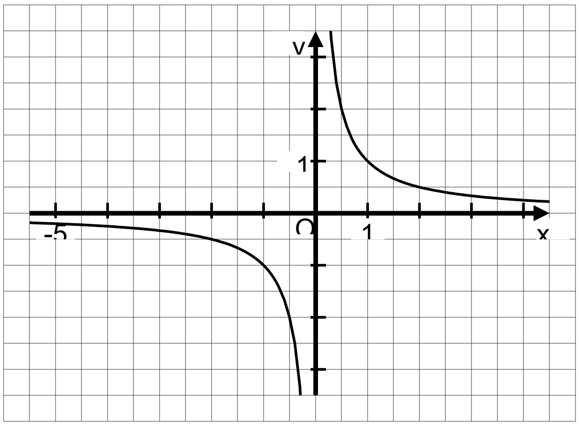
Eine Gerade, an die sich der Graph einer Funktion beliebig genau annähert, heißt **Asymptote**. Es gibt senkrechte, waagrechte und schräge Asymptoten.

Beispiele:

a)

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad D_f = Q \setminus \{0\}$

x-Achse ist waagrechte Asymptote
y-Achse ist senkrechte Asymptote
Es gibt keine Nullstellen



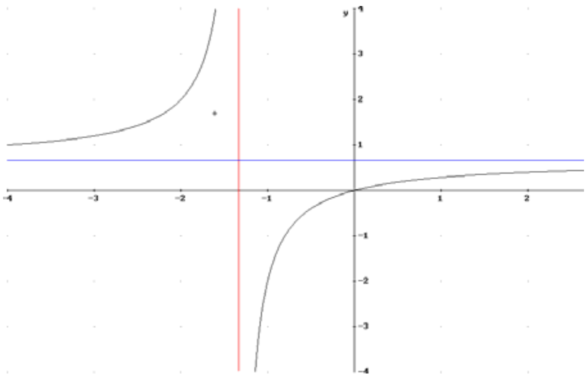
b)

$g(x) = \frac{2x}{3x+4}$ $\qquad D_g = Q \setminus \{-\frac{4}{3}\}$

Nullstelle bei (0 / 0)

$y = \frac{2}{3}$ ist waagrechte Asymptote

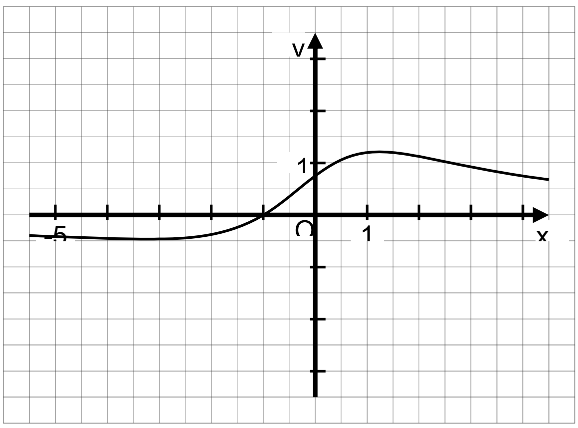
$x = -\frac{4}{3}$ ist senkrechte Asymptote



c)

$h(x) = \frac{3x+3}{x^2+4}$ $\qquad D_h = Q$

Nullstelle ist bei (-1 / 0)
Keine senkrechte Asymptote
x- Achse ist waagrechte Asymptote



Rechnen mit Bruchtermen

1) Beim **Kürzen** werden Zähler und Nenner eines Bruchterms jeweils durch denselben Term dividiert. Dazu muss man Zähler und Nenner vorher in ein Produkt verwandeln.

Beispiel: $\frac{3-3x}{(x+5)\cdot(x-1)}=\frac{-3\cdot\cancel{(-1+x)}}{(x+5)\cdot\cancel{(x-1)}}=\frac{-3}{x+5}$

2) Beim **Erweitern** werden Zähler und Nenner eines Bruchterms mit demselben Term multipliziert.
Dabei muss stets der gesamteZähler und Nenner mit dem Erweiterungsterm multipliziert werden. Klammern setzen!!

Beispiel: $\frac{x}{x-3}=\frac{x\quad\cdot x}{(x-3)\cdot x}=\frac{x^2}{x^2-3x}$

3) Bruchterme mit gleichen Nennern werden **addiert (subtrahiert)**, indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.
Auch beim Addieren oder Subtrahieren wirkt der Bruchstich wie eine Klammer!

Beispiel: $\frac{-4+x}{4x-3}-\frac{1-3x}{4x-3}=\frac{-4+x-(1-3x)}{4x-3}=\frac{-4+x-1+3x}{4x-3}=\frac{4x-5}{4x-3}$
(Beachte: Der Bruch kann nicht mehr gekürzt werden, da im Zähler und Nenner eine Differenz!)

4) Bruchterme mit verschiedenen Nennern müssen vor dem Addieren (Subtrahieren) auf den gleichen Nenner gebracht werden.

Beispiel: $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}=\frac{2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}+\frac{3\cdot x}{(x-1)\cdot x}=\frac{2x-2+3x}{x^2-x}=\frac{5x-2}{x^2-x}$

5) Bruchterme werden miteinander **multipliziert**, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Klammern setzen!
Vor dem Ausmultiplizieren schauen, ob man kürzen kann.

Beispiel: $\frac{5x}{3(x+4)}\cdot\frac{x+4}{x-7}=\frac{5x\cdot\cancel{(x+4)}}{3\cancel{(x+4)}\cdot(x-7)}=\frac{5x}{3\cdot(x-7)}$

6) Durch einen Bruchterm wird **dividiert**, indem man mit seinem Kehrbruchterm multipliziert.

Beispiel: $\frac{2}{x}:\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x}\cdot\frac{x-1}{3}=\frac{2x-2}{3x}$

Negative Exponenten

Bereits bekannte Definition für alle natürlichen Zahlen n und a positiv:

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren a}} = a^n$ (lies: “a hoch n”)

a^n heißt **Potenz**, a heißt **Basis**, n heißt **Exponent**

Diese **Definition** wird erweitert durch: $\boxed{a^0 = 1 \quad und \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Damit gelten die folgenden Potenzgesetze für alle ganzen Zahlen m und n:

Potenzgesetze: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad und \quad a^m : a^n = a^{m-n}}$

Beispiele:

$a)\ 3^{-4} = \frac{1}{81}$

$b)\ 3 \cdot 10^{-6} = \frac{3}{1000000}$

$c)\ x^{-7} \cdot x^3 = x^{-7+3} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

$d)\ x^3 \cdot x^{-12} \cdot x^9 = x^{3-12+9} = x^0 = 1$

$e)\ x^5 : x^{-9} = x^{5-(-9)} = x^{14}$

Bruchgleichungen (1)

Eine Gleichung, bei der die Unbekannte (auch) im Nenner vorkommt, heißt **Bruchgleichung**.

Vorgehen beim Lösen einer Bruchgleichung:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}$$

a) Bestimmen der Definitionsmenge (Zahlen, für die einer der Nenner Null wird, dürfen nicht eingesetzt werden)

$$D=Q\setminus\{-1;0;1\}$$

b) Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner wird die Gleichung in eine nennerfreie Gleichung umgewandelt

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-1}\quad\Big|\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$$

$$\frac{1\cdot\cancel{x}\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{\cancel{x}}+\frac{1\cdot x\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}{\cancel{x+1}}=\frac{2\cdot x\cdot(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

c) Lösen der entstandenen Gleichung

$$x^2-1+x^2-x=2x^2+2x\quad|-2x^2+x$$

$$-1=3x\quad|:3$$

$$x=-\frac{1}{3}$$

d) Probe! Die gefundenen Lösungen müssen auch zur Definitionsmenge der Bruchgleichung gehören

$$L=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

Sind auf beiden Seiten jeweils nur ein Bruchterm ist oft die Über-Kreuz-Multiplikation einfacher, d.h. jeder Nenner wird mit Mal auf die andere Seite gebracht.

$$\frac{6}{2x}=\frac{8}{2x-2}\qquad D=Q\setminus\{0;1\}$$

$$6\cdot(2x-2)=8\cdot 2x$$

$$12x-12=16x\ |-12x$$

$$-12=4x\ |:x$$

$$x=-3$$

$$L=\{-3\}$$

Bruchgleichungen (2)

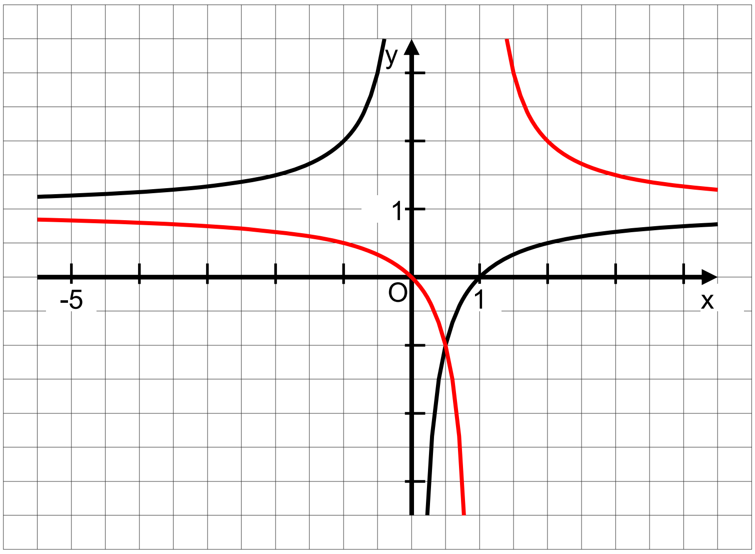
Anwendungen von Bruchgleichungen:

a) Schnittpunkt zweier gebrochen-rationaler Funktionen:

Gegeben sind zwei Funktionen:

$f(x)=\frac{x-1}{x}$ $\quad (schwarz)$

$g(x)=\frac{x}{x-1}$ $\quad (rot)$



In welchem Punkt schneiden sich die beiden Graphen?

Am Schnittpunkt ist f(x) = g(x).

$\frac{x-1}{x}=\frac{x}{x-1}$ $\qquad D=Q\setminus\{0;1\}$

Über – Kreuz – Multiplikation

$(x-1)^2=x^2$

$x^2-2x+1=x^2 \quad |-x^2+2x$

$1=2x$

$x=\frac{1}{2}$ $\qquad Schnittpunkt\,(\frac{1}{2};-1)$

b) Umsetzung einer Textaufgabe in eine Bruchgleichung und deren Lösung

Über eine Röhre füllt man einen 100l Tank in exakt 48 Minuten, eine andere Röhre braucht 50% länger. Wie lange brauchen beide zusammen?

Lösung: Die erste Röhre liefert pro Minute $\frac{100}{48}$ Liter, die andere Röhre $\frac{100}{72}$ Liter. Ist x die Zeit, die beide zum Füllen brauchen, dann liefern sie zusammen $\frac{100}{x}$ Liter.

Es muss gelten:

$$\frac{100}{48}+\frac{100}{72}=\frac{100}{x}$$

Teilt man die Gleichung durch Hundert, erhält man eine Gleichung, die für jede beliebige Tankgröße gilt:

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{72}=\frac{1}{x}$$

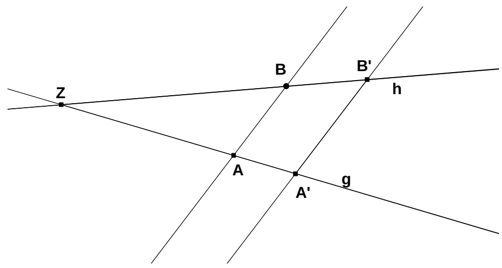
Als Lösung dieser Bruchgleichung erhält man 28,8 Minuten.

Der Strahlensatz (1) 8

<u>1. Strahlensatz</u>

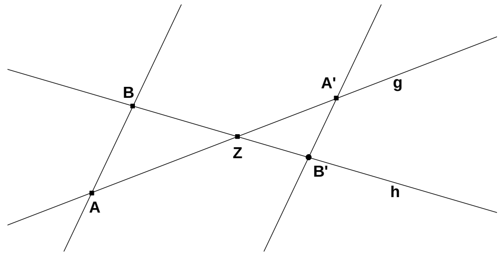
> Werden zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt Z schneiden, von zwei Parallelen (die nicht durch Z laufen) geschnitten, so verhalten sich je zwei Abschnitte auf der einen Geraden, wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

V-Figur:



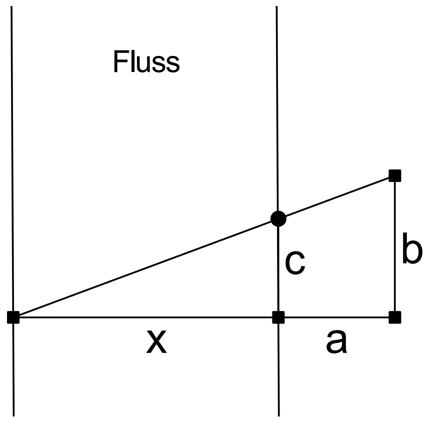
$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{ZA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{BB'}}$$

X-Figur:



$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{ZA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{BB'}}$$

Beispiel:
Die unbekannte Breite eines Flusses lässt sich mit Hilfe eines Maßbandes bestimmen. Man verfährt nach untenstehender Zeichnung und misst die Strecken a = 14 m , b = 25 m und c = 18 m. Berechne daraus die gesuchte Breite x des Flusses.



Lösung:

$$\frac{b}{c} = \frac{a+x}{x}$$

$$\frac{25m}{18m} = \frac{14m+x}{x} \quad |\cdot 18m \cdot x$$

25m·x = (14m+x)·18m
25m·x – 18m·x = 252m²
7m·x = 252m² / :7m
x = 36m Der Fluss ist 36m breit.

Die Umkehrung (d.h. Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung) ist auch richtig:

> **Umkehrung des 1. Strahlensatzes:**
> Wenn bei einer V- bzw. X-Figur je zwei entsprechende Abschnitte auf den sich in Z schneidenden Geraden g und h im selben Verhältnis stehen, dann sind die anderen beiden Geraden parallel.

Fortsetzung nächste Seite

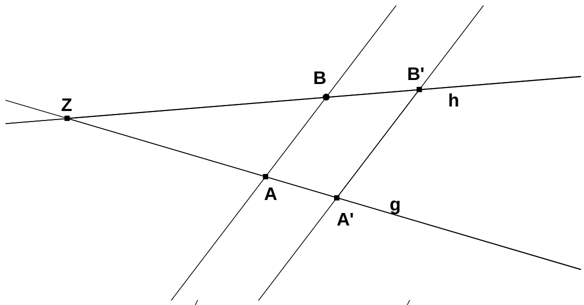
Der Strahlensatz (2) 8

2. Strahlensatz

> Werden zwei Geraden g und h, die sich in einem Punkt Z schneiden, von zwei Parallelen (die nicht durch Z laufen) geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die Entfernungen ihrer Endpunkte von Z auf g (oder h).

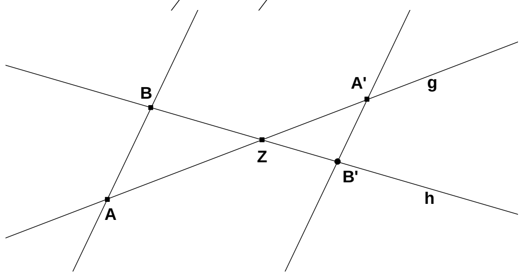
V-Figur:

$$k = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$



X-Figur:

$$k = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$



k heißt Streckfaktor

Beachte:

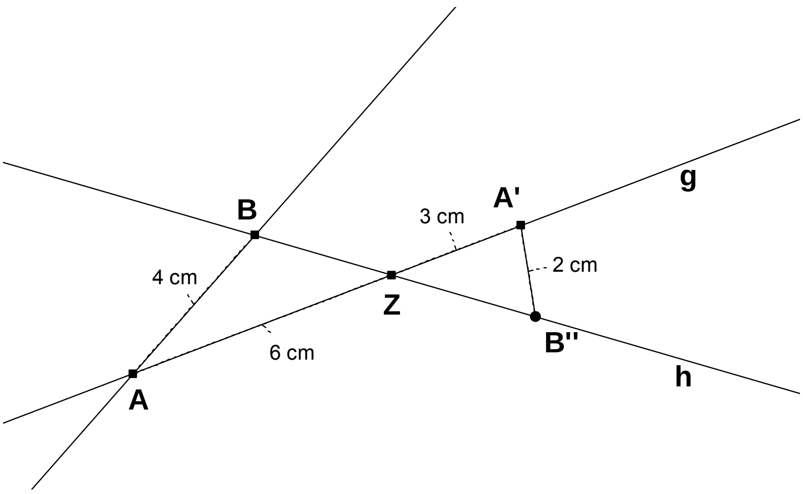
> **Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes ist nicht richtig.**

In der nebenstehenden Zeichnung gilt zwar

$$\frac{6cm}{3cm} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{4cm}{2cm}$$

aber AB ist nicht parallel A'B''.

[Beachte: der Kreis um A' mit Radius 2cm schneidet die Gerade h zweimal!]



Ähnlichkeit 8

1. Ähnliche Figuren (F ~ G)

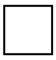
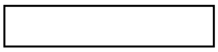
Zwei Figuren F und G heißen ähnlich, wenn alle entsprechenden Winkel gleich groß und alle Verhältnisse entsprechender Streckenlängen gleich sind. (F ~ G)
Der Wert dieser Verhältnisse heißt ***Streckfaktor k*** oder ***Ähnlichkeitsfaktor k***.

Anschaulich bedeutet dies, dass ähnliche Figuren die gleiche Form haben, aber unterschiedliche Größe (außer k =1, dann sind sie kongruent).

Beachte! Das Verhältnis der Flächeninhalte der ähnlichen Figuren ist k^2.
Beispiel: Verhalten sich die Seiten wie 1 : 3, so verhalten sich die Flächen wie 1 : 9

2. Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

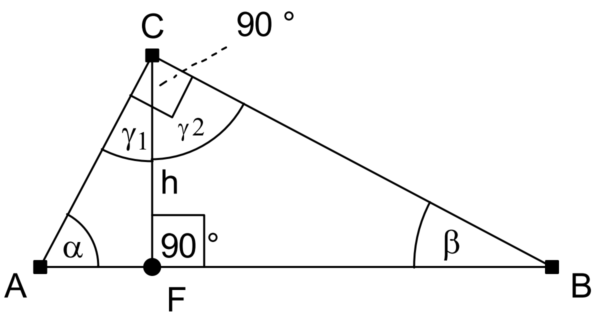
Bei Dreiecken muss man nicht alle Winkel und Seitenverhältnisse überprüfen, um die Ähnlichkeit nachzuweisen, sondern man kommt mit weniger Bestimmungsstücken aus.

a) Zwei Dreiecke sind bereits dann ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln (damit natürlich auch in allen drei) Winkeln übereinstimmen.
Beachte: Zwei Rechtecke stimmen immer in allen vier Winkeln (90°) überein, müssen aber nicht ähnlich sein. z.B.  und 

b) Zwei Dreiecke sind bereits dann ähnlich, wenn sie im Verhältnis ihrer drei Seiten übereinstimmen.

c) Zwei Dreiecke sind bereits dann ähnlich, wenn sie in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.

d) Zwei Dreiecke sind bereits dann ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

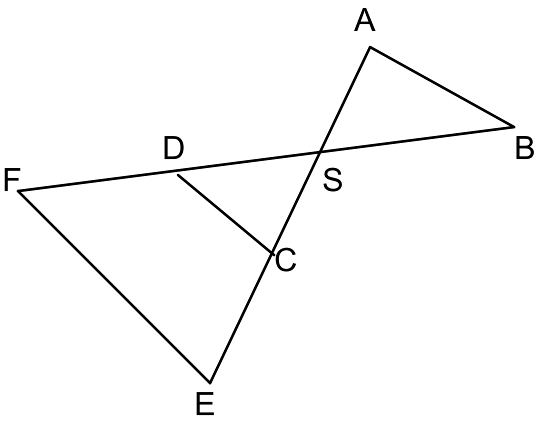


Beispiel:
In einem bei C rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Hypotenuse das Dreieck in zwei zueinander ähnliche Dreiecke, die auch zum großen Dreieck ähnlich sind.
Beweis:
Wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC muss α + ß = 90° sein. Da $\alpha + \gamma_1 = 90°$ ist, muss γ_1 = ß sein. Ebenso gilt γ_2 = α. Damit stimmen die Dreiecke ABC und ACF und CBF in allen drei Winkeln überein und sind damit ähnlich.

$\Delta ABC \sim \Delta ACF \sim \Delta CBF$

Übungsaufgabe zum Strahlensatz 8

1) In der Figur gelte [AB] || [CD] || [EF] .



$\overline{EF} = 20$; $\overline{CD} = 5$; $\overline{FD} = 12$

$\overline{SC} = 6$; $\overline{SA} = 12$

Berechne $\overline{AB}$; $\overline{DS}$!

Lösung:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} \quad 2.\textit{Strahlensatz für } X-\textit{Figur}$$

$$\frac{\overline{AB}}{5} = \frac{12}{6}$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{DS}} \quad 2.\textit{Strahlensatz für } V-\textit{Figur}$$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FD} + \overline{DS}}{\overline{DS}}$$

$$\frac{20}{5} = \frac{12 + \overline{DS}}{\overline{DS}} \quad \left| \cdot \overline{DS} \right.$$

$$4 \cdot \overline{DS} = 12 + \overline{DS} \quad \left| - \overline{DS} \right.$$

$$3 \cdot \overline{DS} = 12 \quad \left| : 3 \right.$$

$$\overline{DS} = 4$$